

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2026/27
MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Ramię trójkąta równoramiennego jest dwa razy dłuższe od jego podstawy. Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna ramienia dzieli ten trójkąt.

2. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2x.$$

Wyznacz odcięte tych punktów, w których styczna do wykresu funkcji f ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 1.

3. Znajdź wszystkie trójki (x, y, z) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+3} + \frac{z}{z+3}.$$

4. Znajdź równanie obrazu krzywej

$$x^2 + y^2 + 12x - 20y + 127 = 0$$

w jednokładności o skali $k = -\frac{1}{3}$ względem punktu $O = (3, -2)$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wszystkie liczby naturalne, które są potęgami liczby 3 lub sumami różnych potęg liczby 3, ustawiono w ciąg rosnący $(1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, \dots)$. Wyznacz 267. wyraz tego ciągu.

6. Wyznacz zbiór $A \setminus (B \setminus C)$, gdzie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^9 + 5x^8 - x^5 - 5x^4 \geq 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 9 - 3^x \leq \sqrt{9^x + 3^x - 2}\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \log_{0,5}(3-x) - \log_{0,5}(x^2-2) - 1 \geq 0\}.$$

7. Ile jest różnych czwórek (a, b, c, d) liczb całkowitych należących do przedziału $\langle -3; 3 \rangle$, takich że $c^2 + d^2 > 0$ oraz wykres funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

jest symetryczny względem prostej $y = x$?