

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2025/26

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. W filharmonii grupa n dziewcząt i m chłopców, gdzie $n \geq m$, zajmuje $m + n$ sąsiednich numerowanych miejsc w jednym rzędzie. Na ile sposobów mogą to zrobić, tak aby każdy chłopiec siedział między dziewczętami?
2. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} + x^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{dla } x \geq 0.$$

3. Rozwiąż równanie

$$|\log_2 x^2 - 2|^{\log_2^2 x^2 - \log_2 x^2 - 2} = 1.$$

4. Funkcja g dana jest wzorem

$$g(x) = 1 + x^3 + \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{4} + \frac{x^9}{8} + \dots$$

Wyznacz jej zbiór wartości (odpowieź wyczerpująco uzasadnij).

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Na okręgu o równaniu

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$$

opisany jest romb. Jednym z jego wierzchołków jest punkt $A = (8, 0)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków rombu i oblicz jego pole.

6. Liczba k jest iloczynem wszystkich liczb całkowitych a , dla których równanie

$$\frac{4a}{1+y} = 3a - 5$$

(o niewiadomej y) ma wyłącznie ujemne rozwiązania. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt[3]{24+x} \geq 6 - \sqrt{k-x-12}.$$

7. Trójkąt prostokątny opisany jest na półkolu o promieniu r w taki sposób, że jeden z boków zawiera średnicę półkola. Wyznacz wymiary tego trójkąta, który ma najmniejsze pole.