

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2023/24**

**MATEMATYKA - ETAP I**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Udowodnij, że liczba  $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}$  jest niewymierna.
2. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych  $n$  podzielnych przez 18, które spełniają nierówność

$$\log_2 2n + \log_4 4n + \log_8 8n < 25.$$

3. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \left| \frac{3x + 3}{x - 2} \right|.$$

Korzystając z niego, podaj, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $f(x) = m$  ma dwa rozwiązania o tych samych znakach.

4. Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem

$$g(x) = 1 + \frac{4}{x^2} + \frac{16}{x^4} + \frac{64}{x^6} + \dots,$$

gdzie prawa strona równości jest sumą szeregu geometrycznego.

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. W okrąg o promieniu  $R$  wpisany jest trapez, przy czym jedna z podstaw jest średnicą tego okręgu. Wykaż, że trapez jest równoramienny. Znajdź miarę kąta wewnętrznego przy dłuższej podstawie takiego trapezu, który ma największe pole.
6. Dany jest  $n$ -kąć foremny  $P$ . Podaj w zależności od  $n$ , ile jest parami różnych trójkątów
  - a) prostokątnych,
  - b) różnobocznych,których wierzchołki są wierzchołkami  $n$ -kąta  $P$ .  
Odpowiedz także na powyższe dwa pytania, jeżeli wyrażenie „parami różnych” zastąpimy przez „parami nieprzystających”.
7. Prosta  $2x - y - 3 = 0$  przecina okrąg  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$  w punktach  $A$  i  $B$ . Napisz równanie okręgu wpisanego w trójkąt  $ABS$ , gdzie  $S$  jest środkiem danego okręgu.