

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2022/23
MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że dla dowolnych niedodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$a^5 + b^5 \leq ab^4 + a^4b.$$

Kiedy prawdziwa jest równość?

2. Punkty styczności okręgu o promieniu r wpisanego w trapez równoramienny dzielą ramię trapezu w stosunku 1 : 3. Oblicz pole trapezu.
3. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest równoramienny trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Krawędź boczna AD jest prostopadła do podstawy ostrosłupa i ma długość przeciwprostokątnej BC . Oblicz kosinusy kątów między ścianami bocznymi ostrosłupa.
4. Zbadaj, nie posługując się rysunkiem, wzajemne położenie figur
 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 \leq 0\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 \leq 0\}$.
Znajdź równanie osi symetrii figury $A \setminus B$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Funkcja g dana wzorem

$$g(x) = (m - 2)x^4 - mx^2 + \log_3(5 + 2r) + \log_3(r - 2)$$

ma w punkcie $x = 1$ ekstremum lokalne równe 2. Wyznacz wartości parametrów m i r . Czy w tym punkcie jest minimum czy maksimum lokalne?

6. Dane są dwa zbiory liczb $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.
- a) Losujemy po jednej liczbie z każdego zbioru. Oblicz prawdopodobieństwo, że ich suma będzie parzysta.
- b) Losujemy cztery razy po jednej liczbie ze zbioru $U \cup V$. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania choć raz liczby parzystej?
- c) Losowo wybieramy ze zbioru V dwie liczby v_1, v_2 , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru $U' = U \cup \{v_1, v_2\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to liczba parzysta.

7. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = p \cdot 5^x + (p + 3) \cdot 5^{-x} - 4.$$

Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?