

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2017/18**

**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których występuje każda z cyfr 0,1,2,3,4,5? Ile jest wśród nich liczb parzystych, a ile liczb pierwszych?
2. Odległości punktu  $P$ , leżącego wewnątrz kwadratu, od trzech jego wierzchołków wynoszą odpowiednio 35 cm, 35 cm i 49 cm. Oblicz odległość punktu  $P$  od czwartego wierzchołka kwadratu.
3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  spełniona jest nierówność

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

4. Rozwiąż równanie

$$\log_x 10 + \log_x 10^2 + \dots + \log_x 10^{100} = 10100.$$

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Prosta  $x + 2y - 13 = 0$  zawiera bok  $AB$ , prosta  $x - y + 5 = 0$  zawiera bok  $BC$  trójkąta  $ABC$ , a prosta  $x - 3y + 7 = 0$  zawiera dwusieczną kąta  $BCA$ . Znajdź wierzchołki tego trójkąta.
6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy długości  $a = 2$  dm kąt między ścianami bocznymi ma miarę  $135^\circ$ . Ostrosłup ten przecięto dwiema płaszczyznami równoległymi do postawy na trzy bryły o równych objętościach. Oblicz odległość między tymi płaszczyznami.
7. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji określonej wzorem

$$f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^3} + \frac{27}{x^5} + \dots.$$