

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2021/22

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$a^{a-b} \geq b^{a-b}.$$

2. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Wykaż, że różnicą ciągu jest długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
3. Cztery kolejne liczby parzyste są pierwiastkami wielomianu o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że wartość tego wielomianu dla dowolnej liczby parzystej jest podzielna przez 384.

4. Udowodnij, że dla dowolnego trójkąta o długościach boków a, b, c

$$2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < \sqrt{3}(a + b + c).$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz zbiór wartości funkcji g danej wzorem

$$g(x) = \cos 4x + 5 \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Dla jakich argumentów x funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość?

6. Dana jest liczba naturalna $k \geq 4$. Na ile sposobów można $k + 1$ zadań przydzielić k komputerom, tak by dokładnie jeden komputer był wolny, jeżeli
- a) zadania i komputery są rozróżnialne,
 - b) komputery są rozróżnialne, a zadania nie,
 - c) zadania są rozróżnialne, a komputery nie,
 - d) ani zadania, ani komputery nie są rozróżnialne?
7. Na płaszczyźnie dane są zbiory

$$S = \{(x, y) : \log_{|y+1|} x \leq 1\},$$

$$A_m = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2mx - 4y + 4 \leq 0\},$$

gdzie $m \in \mathbb{R}$. Narysuj zbiór S . Dla jakich liczb m zbiór A_m zawiera się w zbiorze S ?