AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2018/19

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Dwa okręgi o promieniach r i R, gdzie $r < R$, są styczne zewnętrznie. Wyznacz pole trójkąta ograniczonego ich wspólnymi stycznymi.

2. Udowodnij, że suma S nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 < 0$, spełnia nierówność
$$S \leqslant 4a_2.$$
Kiedy spełniona jest równość?

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba
$$S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$$
jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Rozwiąż nierówność
$$2^{1+\log_2 x} \geqslant x^{\frac{1}{4}(7+\log_2 x)}.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Dane są równania
$$x^2 - px + q = 0 \qquad \text{oraz} \qquad x^2 - px - q = 0,$$
gdzie p i q są liczbami naturalnymi. Wykaż, że jeżeli obydwa równania mają pierwiastki całkowite, to istnieją liczby naturalne a, b, takie że $p^2 = a^2 + b^2$. Czy implikacja odwrotna jest prawdziwa?

6. Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$, a okrąg o_2 równanie $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0$. Oblicz skalę jednokładności i współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o_1 jest okrąg o_2. Napisz równania prostych, które są jednocześnie styczne do obu okręgów.

7. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły obrotowej powstałej z obrotu sześciokąta foremnego o boku a wokół prostej zawierającej bok sześciokąta.