

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2016/17
MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że jedyną liczbą pierwszą p , taką że liczba $p^2 + 2$ też jest pierwsza, jest $p = 3$.
2. Dane są punkty $A = (-1, -2)$, $B = (3, 1)$, $C = (1, 4)$. Prosta l jest równoległa do prostej AC i dzieli trójkąt ABC na dwie figury o równych polach. Znajdź równanie prostej l .
3. Rozwiąż równanie

$$4 \sin^2 x + 8 \sin^2 x \cos x = 2 \cos x + 1.$$

4. Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że jeżeli $a < b$, to

$$a^3 - b^3 < a^2b - ab^2.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wykaż, że jeżeli liczba m spełnia nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{2m}\right) \log_{0,5} 3 - \log_{0,5} \left(27 + 3^{\frac{1}{m}}\right) \leq 2,$$

to $x^2 + mx + 1 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

6. Nieskończony ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = 1 + 2 + \dots + n$.
 - a) Znajdź wszystkie cyfry jedności wyrazów tego ciągu w zapisie dziesiętnym. Udowodnij, że znalezione rozwiązanie jest poprawne.
 - b) Wyznacz granicę ciągu (b_n) , gdzie

$$b_n = \frac{a_{(n-1)^2}}{(a_{3n} - a_{2n})^2}.$$

7. Cztery kule o jednakowym promieniu a są parami zewnętrznie styczne. Znajdź promienie dwóch kul, z których każda jest styczna do wszystkich czterech kul.