

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2014/15

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby p przez 30 nie jest liczbą złożoną.
2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

3. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3^{n+1} + 2^{3+2n}}{2^{2n+1} + 3^n}.$$

4. Na ile sposobów można zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie $n \geq 3$, podzielić na trzy niepuste podzbiory?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Dla jakich wartości parametru m nierówność

$$(m^2 - 1) \cdot 25^x - 2(m - 1) \cdot 5^x + 2 > 0$$

jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x ?

6. W sześcianie o krawędzi długości a zawarte są dwie sfery zewnętrznie styczne, przy czym ich środki leżą na przekątnej sześcianu i każda z nich jest styczna przynajmniej do trzech ścian sześcianu. Oblicz promienie tych sfer, dla których suma ich pól powierzchni jest a) największa, b) najmniejsza.
7. Wyznacz równania stycznych do okręgu

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$$

poprowadzonych z punktu $M = (1, 0)$. Jaką krzywą stanowi zbiór wszystkich środków cięciw tego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt M ? Napisz jej równanie.