AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH" 2014/15

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji danej wzorem $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ w przedziale $\langle 0; 5\rangle$.

3. Znajdź punkty nieciągłości funkcji danej wzorem
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 + x^3 + 8x + 8}.$$
W których z tych punktów można określić wartość funkcji tak, żeby była ciągła?

4. W każdym z ostatnich dwóch notowań cena ropy spadała o $k\%$, gdzie $k \in (0; 100)$. O ile procent musiałaby cena wzrosnąć w najbliższym notowaniu, żeby wróciła do początkowego poziomu?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Figura B jest obrazem figury
$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 \leq 0 \quad \wedge \quad x - 7y + 25 \geq 0\}.$$
przez symetrię względem prostej $x - 2y = 0$. Znajdź nierówności opisujące figurę B i oblicz jej obwód.

6. Rozwiąż nierówność
$$\log_{2x}(x^4 + 3) \geq 2.$$

7. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 15\,\text{cm}$, $b = 20\,\text{cm}$ wpisany jest okrąg. Oblicz odległości od każdego wierzchołka trójkąta do punktu styczności okręgu z przeciwległym bokiem.