

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2015/16

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie

$$(x - 2y - 1)(x + 2y + 1) = 3.$$

2. Przy okrągłym stole z 10 ponumerowanymi krzesłami siada 5 kobiet i 5 mężczyzn, wybierając miejsca w sposób przypadkowy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć jedna osoba usiadzie obok osoby tej samej płci?
3. Rozwiąż równanie

$$|\cos x|^{2\cos x+1} = 1.$$

4. Dla jakich a liczby

$$\log_{0,5} a^2, \quad 3 + \log_{0,5} a, \quad -1 - \log_{0,5} 2a^3$$

są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (2, 1)$, $B = (-2, 7)$, $C = (-6, 5)$.
- a) Znajdź współrzędne punktu D , dla którego czworokąt $ABCD$ (w tej kolejności wierzchołków) jest równoległobokiem.
- b) Figura F jest sumą prostej AB i prostej CD . Napisz równania wszystkich osi symetrii figury F .
- c) Znajdź obraz figury F w jednokładności o środku w punkcie A i skali równej 3.
6. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej m liczbę pierwiastków równania

$$\left| \frac{4x + 2}{x^2 + 2} \right| = m.$$

Naszkiej wykres funkcji f .

7. Trójkąt równoramienny o obwodzie 36 cm obraca się wokół prostej zawierającej podstawę trójkąta. Jakie powinny być wymiary tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była największa?