

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2013/14

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że żaden element zbioru $S = \{6n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.
2. Rozwiąż równanie

$$5 + \frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{25} + \frac{x^6}{125} - \frac{x^8}{625} + \dots = x^2 + 1, (4),$$

w którym drugi składnik prawej strony jest ułamkiem dziesiętnym okresowym.

3. Na ile sposobów można n kul rozmieścić w n pudełkach tak, żeby dokładnie dwa pudełka zostały puste? Załóż, że $n \geq 3$ oraz zarówno kule jak i pudełka są między sobą rozróżnialne.
4. Sporządź wykres funkcji danej wzorem

$$f(x) = 5^{|\log_{0,2} x|}.$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Dany jest prawidłowy ostrosłup czworokątny. Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i równoległą do krawędzi bocznej skośnej względem tej przekątnej jest równe P . Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich boków podstawy i środek wysokości ostrosłupa wynosi S . Oblicz iloraz $\frac{P}{S}$.
6. Dla jakich $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ liczby

$$\operatorname{tg} x, \quad 1, \quad \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) ? Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}$.

7. Rozwiąż w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ równanie

$$(1 - p)(|x + 2| + |x|) = 4 - 3p.$$