

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2012/13**  
**MATEMATYKA - ETAP III**

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że zbiór  $S = \{6n + 3 : n \in \mathbb{N}\}$ , gdzie  $\mathbb{N}$  jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.
2. Rozwiąż równanie  $4 \cos^2 2x = 3$ .
3. Sfera  $S_1$  jest wpisana w sześcian, sfera  $S_2$  jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześcianu, a sfera  $S_3$  jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.
4. Rozwiąż nierówność  $\sqrt{x^2 - 16x + 64} + x \leq 7 + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru  $m$  równanie
$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$
ma pierwiastek całkowity. Dla jakich  $m$  wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?
6. Rzucamy  $n$  razy sześcienną kością do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:  
 $A$ : ani razu nie wypadła szóstka,  
 $B$ : parzysta liczba oczek wypadła więcej razy niż nieparzysta,  
 $C$ : suma wyrzuconych oczek jest równa  $6n - 2$ .
7. Rozwiąż nierówność

$$3 - \log_{0,5} x - \log_{0,5}^2 x - \log_{0,5}^3 x - \dots \geq 4 \log_{0,5} x.$$