

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2012/13
MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Ile jest ciągów (x_1, x_2, x_3, x_4) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$?

2. Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{5-x}{2x+1}.$$

Rozwiąż nierówność $f(x+5) \geq f(x-3)$.

3. Wyznacz dziedzinę i zbadaj parzystość funkcji

$$f(x) = (x^2 + 1) \frac{3^{2x} + 3^{-2x}}{\sin^2 2x + 2} - x^3 \log \frac{3x^2 + 5x + 8}{3x^2 - 5x + 8}.$$

4. Znajdź rzut równoległy punktu $A(1, -2)$ na prostą $x - y + 3 = 0$ w kierunku wektora $\vec{v} = [1, 2]$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym miary kątów nachylenia ściany bocznej i krawędzi bocznej do podstawy ostrosłupa wynoszą odpowiednio α i β . Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli wpisanej w niego.

6. Naskicuj wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę $f(m)$ pierwiastków równania

$$4^{|x|} + (m+1)2^{|x|+1} = 5 - m^2$$

z niewiadomą x .

7. Ciąg trzech liczb całkowitych (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym, którego iloraz jest liczbą całkowitą. Jeżeli do najmniejszej z nich dodamy 9, to otrzymamy trzy liczby, które odpowiednio uporządkowane utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź wszystkie takie ciągi (a, b, c) .