

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2011/12
MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Wykaż, że liczba $a = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ jest całkowita.
2. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem
$$f(x) = \sqrt{x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x}.$$
3. Oblicz miarę kąta między wektorami \vec{a} i \vec{b} wiedząc, że wektory $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{v} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ są prostopadłe oraz $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.
4. Dwa różne automaty wykonują razem daną pracę w ciągu 6 godzin. Gdyby pierwszy automat pracował sam przez 2 godziny, a następnie drugi pracował sam przez 6 godzin, to wykonałyby połowę całej pracy. W jakim czasie każdy automat może samodzielnie wykonać całą pracę?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$ losujemy trzy liczby i ustawiamy je w ciąg rosnący (a, b, c) . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń
 A : iloczyn abc jest liczbą parzystą,
 B_k : $b = k$, gdzie k jest ustaloną liczbą ze zbioru S .
Dla jakich k prawdopodobieństwo zdarzenia B_k jest największe?
6. Dane są dwa punkty $A = (7, 5)$, $B = (1, -1)$ oraz punkt $P = (3, 3)$ przecięcia wysokości trójkąta ABC . Oblicz pole trójkąta ABC i napisz równanie okręgu opisanego na nim.
7. Stożek i walec mają równe tworzące, równe objętości i równe pola powierzchni bocznej. Oblicz
 - a) sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy,
 - b) stosunek pola przekroju osiowego walca do pola przekroju osiowego stożka.