

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2010/11
MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Kula K jest wpisana w sześcián. Kula K' jest styczna do trzech ścian tego sześciánu i do kuli K . Oblicz stosunek promienia kuli K do promienia kuli K' .
2. Suma kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych a, b, c jest równa 2010. Ile jest wśród nich liczb parzystych?
3. Znajdź liczbę p , dla której granica ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 9pn} - \sqrt[3]{n^3 - 5pn^2}$$

jest równa 2.

4. Punkty $A = (-2, 3)$ i $B = (1, 2)$ są wierzchołkami trójkąta T . Wyznacz współrzędne trzeciego wierzchołka wiedząc, że pole trójkąta T jest równe 3, a środek jego ciężkości leży na osi OY .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Liczba naturalna a ma $2n$ cyfr, z których pierwsze n cyfr to same czwórki, a pozostałe cyfry to ósemki. Udowodnij, że $\sqrt{a+1}$ jest liczbą naturalną dla każdego n .
6. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie narysuj zbiór
$$A = \{(x, y) : \log_y(8x + y - 2 - x^2) \geq \log_y(8 - x^2 + 8x - 2y - y^2)\}.$$
7. Naszkicuj wykres funkcji $g : m \rightarrow g(m)$, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę pierwiastków równania

$$2^{2x+2} + 4^x + 4^{x-1} + \dots = m + 16^x.$$