

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2009/10
MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Na półsferze o promieniu R leżą dwa styczne do siebie okręgi o promieniu r . Wyznacz największą odległość między dwoma punktami należącymi do tych okręgów.
2. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2x > 0.$$

3. Kran A napełnia basen wodą w ciągu 10 godzin, a kran B w ciągu 15 godzin. W ciągu ilu godzin napełniony zostanie basen, jeżeli oba krany będą działać jednocześnie?
4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$4 \cos 2x \sin 2x + 1 = 0$$

należące do przedziału $(-\pi; \pi)$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$, gdzie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 \geq 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \log_{0,5}(x + 3) \geq \log_{0,5}(6 - 2x)\}.$$

6. Oblicz pole trójkąta, mając dane dwie proste $4x + 5y + 17 = 0$ i $x - 3y = 0$, zawierające środkowe trójkąta, oraz jeden jego wierzchołek $A = (-1, -6)$.
7. Ile jest równań postaci

$$x^2 - px + q = 0,$$

które mają dwa pierwiastki mniejsze od 7, przy czym liczby p i q są całkowite i dodatnie.