

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica
w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2007/8**

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. W trapezie o polu P stosunek długości podstaw jest równy $k > 1$. Oblicz pola dwóch trójkątów, na które ten trapez dzieli jego przekątna.
2. Rozwiąż nierówność

$$0,1^x \cdot 0,1^{x^3} \cdot 0,1^{x^5} \cdot \dots > \frac{\sqrt[3]{10000}}{100}.$$

3. Połowę drogi kierowca jechał autostradą z prędkością 120 km/h, a drugą połowę na drogach lokalnych ze średnią prędkością 60 km/h. Oblicz średnią prędkość całej podróży.
4. Znajdź równania okręgów o promieniu 3 stycznych jednocześnie do osi OX i do prostej $12x + 5y = 0$.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Na czworościanie foremnym opisano walec w ten sposób, że dwie krawędzie czworościanu leżące na prostych skośnych są średnicami podstaw walca. Oblicz stosunek pola powierzchni sfery opisanej na walcu do pola powierzchni sfery wpisanej w czworościan.
6. Dla jakich wartości parametru m dokładnie jeden pierwiastek równania

$$(m - 2)9^x + (m + 1)3^x - m = 0$$

jest mniejszy od 2?

7. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$ losujemy trójelementowy podzbiór $T = \{p, q, r\}$, przy czym prawdopodobieństwo wylosowania każdego podzbioru jest jednakowe.
 - a) Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn pqr jest podzielny przez 3.
 - b) Niech φ będzie funkcją przyporządkowującą każdemu wylosowanemu podzbiorowi T „element pośredni” (tzn. jeśli $p < q < r$, to $\varphi(T) = q$). Jaka wartość funkcji φ jest najbardziej prawdopodobna?