

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2015/16
MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Znajdź wszystkie rosnące ciągi (a_n) o wyrazach całkowitych takie, że $a_2 = 2$ oraz $a_{mn} = a_m a_n$ dla wszystkich liczb naturalnych m, n .
2. Na ile sposobów można grupę $3k$ osób posadzić przy dwóch okrągłych stołach, jeżeli przy jednym stole jest $2k$ ponumerowanych krzeseł, a przy drugim k ? A na ile sposobów można to zrobić tak, by ustalone dwie osoby siedziały obok siebie, jeżeli $k \geq 2$?
3. Rozwiąż nierówność $3^x - 2^x > 3^{x-2}$.
4. Oblicz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt[3]{8n^3 - 2n^2}).$$

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Dla jakich wartości parametru p równanie
$$\cos^3 x + p \cos x + p + 1 = 0$$
ma dokładnie trzy rozwiązania w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$?
6. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (5, -4)$, $B = (6, -1)$, $C = (-2, 3)$. Zbadaj wzajemne położenie tego okręgu oraz jego obrazu w symetrii osiowej względem prostej
$$3x + 4y + 26 = 0.$$
7. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $a = 12$ cm, a sinus kąta między ścianami bocznymi wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i dzielącą przeciwległą ścianę boczną na dwie figury o równych polach. Oblicz objętości brył, które powstały w wyniku przecięcia ostrosłupa tą płaszczyzną.