

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2021/22

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Rozwiąż nierówność

$$|\log_{0,5}(2 - x)| \geq 1.$$

2. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 8.
3. Znajdź równania prostych stycznych do krzywej $y = x^2 + \frac{1}{x}$ i prostopadłych do prostej $4x + 15y - 3 = 0$.
4. Punkt S jest środkiem wysokości czworościanu foremnego $ABCD$ opuszczonej z wierzchołka D . Wyznacz miarę kąta ASB .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Ze zbioru dodatnich liczb całkowitych mniejszych od $3n$ losujemy ze zwracaniem trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna z tych liczb jest równa n .
Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że iloczyn tych trzech liczb jest podzielny przez 3. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$m \cdot 2^x + (m + 3)2^{-x} = 4$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

7. Prosta przechodząca przez punkt $M = (3, 1)$ ogranicza wraz z dodatnimi półosiąmi układu współrzędnych XOY trójkąt o najmniejszym polu. Wokół którego boku należy obracać ten trójkąt, aby otrzymana bryła obrotowa miała najmniejszą objętość? Podaj tę objętość.