

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2021/22**

**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Jadąc z prędkością 30 km/godz. spóźnimy się na spotkanie 10 minut, a jadąc z prędkością 60 km/godz. będziemy 10 minut za wcześnie. Z jaką prędkością powinniśmy jechać, aby przybyć punktualnie?
2. Bok kwadratu jest przeciwprostokątną  $AB$  trójkąta prostokątnego, którego trzeci wierzchołek  $C$  leży na zewnątrz kwadratu. Niech  $S$  będzie środkiem kwadratu. Uzasadnij, że kąty  $ACS$  i  $BCS$  są przystające.
3. Dane są trzy kolejne liczby całkowite. Udowodnij, że kwadraty dokładnie dwóch z nich dają resztę 1 z dzielenia przez 3.
4. Liczby  $2 \log_2 x$ ,  $\log_2 2x$ ,  $\log_2(x - 4)$  są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdź setny wyraz tego ciągu.

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $f$ , jeżeli dla każdego  $x$  należącego do jej dziedziny spełniona jest równość

$$f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + \dots = -\frac{1}{5}(x^2 + 1).$$

6. Dane są dodatnie liczby całkowite  $n$  oraz  $k$ , przy czym  $k \leq n$ . Ze zbioru liczb  $\{1, 2, \dots, n\}$  losujemy kolejno bez zwracania  $k$  liczb, otrzymując w ten sposób ciąg  $k$ -wyrazowy. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń  
 $A$  : liczba  $k$  nie występuje w tym ciągu,  
 $B$  :  $k$  jest ostatnim wyrazem ciągu,  
 $C$  : ciąg jest monotoniczny i  $k$  jest jego wyrazem.
7. Punkty  $A = (0, 7)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (-3, -2)$  są wierzchołkami trójkąta. Znajdź równanie okręgu opisanego na tym trójkącie i równanie jego obrazu w symetrii środkowej względem punktu  $A$ . Napisz równania wszystkich prostych stycznych jednocześnie do obu tych okręgów.