

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2020/21

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 48. Odcinek łączący środki E, F przekątnych ma długość 4. Oblicz długość krótszej podstawy.
2. Znajdź wszystkie elementy zbioru $\{\cos \frac{(n^7-n)\pi}{12} : n \in \mathbb{N}\}$. Odpowiedź wyczerpująco uzasadnij.
3. Oblicz długość najdłuższej krawędzi prostopadłościanu o objętości 216 i przekątnej długości $2\sqrt{91}$, jeżeli długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny.
4. Naszkiecuj wykres funkcji danej wzorem

$$f(x) = x - |x| - 2^{|x|+x}.$$

Na podstawie tego wykresu podaj liczbę rozwiązań równania $3f(x+5) = m$ w zależności od parametru m .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Niech H będzie zbiorem wszystkich tych punktów hiperboli o równaniu $x^2 - y^2 = 25$, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Napisz równania okręgów, zawierających co najmniej po cztery punkty zbioru H .
6. Dla jakich wartości parametru p układ równań

$$\begin{cases} 4x + (p+3)y = p-1 \\ (p-1)x + py = p-2. \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające nierówność $|x| + |y| \leq 4$?

7. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozważmy zbiór Ω wszystkich permutacji (a_1, \dots, a_n) liczb $1, \dots, n$.
 - A. Ile jest permutacji niebędących ciągami monotonicznymi?
 - B. Ile jest permutacji, takich że $a_i + a_{n-i+1} = a_j + a_{n-j+1}$ dla wszystkich $i, j = 1, \dots, n$?
 - C. Dane są liczby naturalne k, m , przy czym $1 < k < m \leq n$. Dla każdej permutacji $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ze zbioru Ω oznaczmy przez $g(a)$ największą liczbę $j \leq n$, taką że $a_i < a_{i+1}$ dla wszystkich $i < j$. Ile jest permutacji a , dla których $g(a) = k$ i jednocześnie $a_k = m$?