

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2020/21**  
**MATEMATYKA - ETAP III**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. W czworokącie  $ABCD$  kąt wewnętrzny przy wierzchołku  $A$  jest kątem prostym. Długości boków są równe  $|AB| = |AD| = 15$ ,  $|BC| = 3$ ,  $|CD| = 21$ . Oblicz pole tego czworokąta.
2. Dany jest ciąg  $(a_n)$ , którego  $n$ -ty wyraz jest równy

$$a_n = 40 - 6n.$$

Oblicz sumę tych 20 początkowych wyrazów ciągu, które są ujemne i podzielne przez 8.

3. Rozwiąż równanie

$$2^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} = 3.$$

4. W wycieczce bierze udział  $2n$  osób. Każda z nich ma wśród uczestników wycieczki co najmniej  $n - 1$  innych osób pochodzących z tego samego miasta co ona. Z ilu miast pochodzą uczestnicy wycieczki? W każdym możliwym przypadku podaj liczbę uczestników z poszczególnych miast.

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. W urnie znajdują się 2 kule białe i 10 czerwonych.
  - a) Losujemy ze zwracaniem 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kule o różnych kolorach.
  - b) Losujemy bez zwracania  $k$  kul. Wyznacz najmniejszą wartość  $k$ , dla której prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednej kuli białej jest większe od 0,5.
6. Dla jakich wartości parametru  $p$  równanie

$$\frac{\log_3(px + p)}{\log_3(3 + x)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie ?

7. W stożku o promieniu podstawy  $R$  i wysokości  $H$  zawarty jest graniastosłup prawidłowy czworokątny tak, że jego podstawa zawiera się w podstawie stożka. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?