

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2018/19
MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Ze zbioru dziesięciu kolejnych liczb naturalnych usunięto jedną z nich. Suma pozostałych liczb wynosi 2019. Znajdź sumę wszystkich dziesięciu liczb.
2. Ostrosłup podzielono na dwie bryły płaszczyzną równoległą do podstawy i dzielącą jego wysokość na dwa przystające odcinki. Jaki procent objętości ostrosłupa stanowi objętość większej z tych brył?
3. Wyznacz liczbę p , dla której

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 + pn^2} \right) = -2.$$

4. Oblicz długości przekątnych równoległoboku o bokach długości 3 i 5, przy czym sinus kąta wewnętrznego jest równy 0,8.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Wyznacz zbiór $(A \setminus B) \cap C$, gdzie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{4}}(2^x + 10) \leq 0, 5 + 2 \log_{\frac{1}{4}}(2^x - 2)\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \leq \sqrt{x + 3}\},$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \binom{n+2}{2} > 3^{n-1}\}.$$

6. Losowo dzielimy n -elementowy zbiór X na dwa zbiory S i $X \setminus S$, przy czym dla dowolnego $a \in X$ prawdopodobieństwo, że a zostanie wylosowany do zbioru S wynosi $\frac{1}{2}$. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
 A : zbiór S ma dokładnie k elementów;
 B : żaden ze zbiorów S i $X \setminus S$ nie jest pusty;
 C : zbiór S zawiera więcej elementów niż zbiór $X \setminus S$.
7. Spośród wszystkich trójkątów prostokątnych o przeciwprostokątnej długości c wskazać ten, dla którego największa jest objętość bryły obrotowej, powstałej z obrotu tego trójkąta wokół przyprostokątnej,
 - a) która jest krótsza.
 - b) która nie jest krótsza.