

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2018/19**  
**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Kierowca przejechał połowę drogi autostradą, a drugą połowę lokalnymi drogami z prędkością dwa razy mniejszą. Jaki procent drogi przejechał kierowca po upływie połowy czasu podróży?
2. Liczba  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$  spełnia równanie

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 5 \operatorname{tg} \alpha - 1.$$

Oblicz  $\cos 2\alpha$ .

3. Na ile sposobów można tak ustawić w ciąg  $k$  czarnych kul i  $k + 1$  białych, by żadne dwie czarne kule nie znalazły się obok siebie? Zakładamy, że kule tego samego koloru są nierozróżnialne.
4. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^5 + 8x^2}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}.$$

W których punktach nienależących do dziedziny można określić wartość funkcji  $f$ , aby otrzymać funkcję ciągłą w danym punkcie?

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. W prawidłowy ostrosłup czworokątny o krawędzi podstawy długości  $a$  i krawędzi bocznej długości  $b$  tak wpisany jest walec, że jedna z podstaw walca zawiera się w podstawie ostrosłupa. Wyznacz wymiary walca o możliwie największej objętości.
6. Dla jakich liczb rzeczywistych  $m$  równanie

$$(m - 3)x^2 + 2mx + m - 2 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$ , spełniające nierówność

$$\log_{0,1} x_1 + \log_{0,1} x_2 \geq 0?$$

7. W trójkąt równoboczny o boku długości  $a$  tak wpisane są trzy przystające okręgi, że każdy z nich jest styczny do dwóch pozostałych i do dwóch boków trójkąta. Oblicz promień okręgu zewnętrze stycznego do tych trzech okręgów.