

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2016/17**

**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Udowodnij, że spośród dowolnych pięciu liczb naturalnych można wybrać trzy, których suma jest podzielna przez 3.
2. Rozwiąż równanie
$$\frac{\log_x(x^3 + 3)}{\log_x(x + 1)} = 2.$$
3. Ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których liczba cyfr parzystych jest równa liczbie cyfr nieparzystych?
4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , w którym  $|AB| = 10$  cm,  $|AC| = 8$  cm i miara kąta przy wierzchołku  $A$  jest równa  $60^\circ$ .

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Wykres funkcji kwadratowej  $f(x)$  przechodzi przez punkty  $(-2, 16)$ ,  $(1, -2)$ ,  $(3, 6)$ . Po przesunięciu go o wektor  $\vec{v} = [2, -6]$  i przekształceniu przez symetrię względem prostej  $x = 0$  otrzymano wykres funkcji  $g(x)$ . Wykres funkcji  $g(x)$  przekształcono przez symetrię względem prostej  $y = 3$ , otrzymując wykres funkcji  $h(x)$ . Napisz wzory funkcji  $f(x)$ ,  $g(x)$  i  $h(x)$ .
6. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do podstawy pod kątem  $\alpha$ . W ostrosłup wpisano półkulę o promieniu  $R$  tak, że jest ona styczna do ścian bocznych, a koło wielkie zawiera się w podstawie ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa.
7. Suma wszystkich współczynników wielomianu  $W(x)$  jest równa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{-2-n} + 2^{1-2n}}{5^{2-n} + 2^{-1-2n}}.$$

Suma współczynników przy parzystych potęgach zmiennej  $x$  jest 3 razy większa niż suma współczynników przy potęgach nieparzystych. Znajdź reszty z dzielenia  $W(x)$  przez dwumiany: a)  $x - 1$ , b)  $x + 1$ , c)  $x^2 - 1$ .