

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2013/14

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Urządzenie I wykonuje pewną pracę w ciągu 20 godzin, a urządzenie II w ciągu 30 godzin. W jakim czasie wykonają tę pracę oba urządzenia pracując jednocześnie?
2. Kotangens kąta rozwartego α jest równy -3 . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 2α .
3. Rozwiąż nierówność $|3 \log_x 2 - 2| > 1$.
4. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) , którego n -ty wyraz jest równy

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{3^n + 2^{2n+1}}.$$

Wyznacz granicę ciągu (a_n) .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Okrąg O ma równanie $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$. Okrąg O' jest obrazem okręgu O przez translację o wektor $\vec{v} = [7, 1]$. Znajdź równania osi symetrii sumy $O \cup O'$ tych okręgów. Wyznacz punkty wspólne obu okręgów. Znajdź równania prostych stycznych jednocześnie do O i O' .
6. Podstawą ostrosłupa o wysokości H jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AB| = a$ i $|AC| = b$. Krawędź boczna wychodząca z wierzchołka A jest prostopadła do podstawy. Ostrosłup ten podzielono płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, która nie jest ostrosłupem.
7. Do windy na parterze budynku czteropiętrowego wsiada osiem osób. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
 A : wszyscy wysiądą na tym samym piętrze,
 B : na czwartym piętrze wysiądą co najmniej dwie osoby,
 C : na każdym piętrze wysiądą po dwie osoby.