

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2010/11

MATEMATYKA - ETAP III

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Dany jest n -elementowy zbiór X oraz jego k -elementowy podzbiór S . Ze zbioru X wybieramy losowo m elementów, tworząc zbiór B . Zakładając, że $k > 0$, $m > 0$ oraz $m + k \leq n + 1$, oblicz prawdopodobieństwo, że zbiory B i S będą miały dokładnie jeden element wspólny.
2. Oblicz sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych niepodzielnych przez 7.
3. Wyznacz dziedzinę funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x}.$$

Zbadaj granice funkcji f w punktach nienależących do dziedziny.

4. Suma dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x, y jest równa dodatniej liczbie a . Jaką najmniejszą wartość może mieć suma kwadratów liczb x i y ?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. W prawidłowy graniastosłup sześciokątny wpisano sferę (styczną do wszystkich ścian bocznych i do obu podstaw). Oblicz stosunek pola powierzchni tej sfery do pola powierzchni sfery opisanej na graniastosłupie.
6. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$\frac{\log(px^2)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

7. Znajdź równania stycznych do okręgu C o równaniu

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

przechodzących przez punkt $P = (\frac{16}{3}, 2)$. Oblicz długość promienia okręgu stycznego do obydwu prostych i do okręgu C .