

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2009/10**

**MATEMATYKA - ETAP II**

**ZADANIA PO 10 PUNKTÓW**

1. Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola jego podstawy. Ile razy objętość stożka jest większa od objętości kuli wpisanej w ten stożek?
2. Dane są funkcje  $f(x) = 2^{x+1} + 5^{x-5}$  i  $g(x) = 25^x + 4^x$ . Rozwiąż równanie  $g(\frac{x}{2}) = f(x+3)$ .
3. Oblicz  $\sin 2\alpha$ , jeżeli  $\sin \alpha = 0,75$  i  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ .
4. Wyznacz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^6 + 5n^4} - n^2).$$

**ZADANIA PO 20 PUNKTÓW**

5. Znajdź równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$  przechodzących przez początek układu współrzędnych. Znajdź równania obrazów tego okręgu i jednej z wyznaczonych stycznych w jednokładności o środku w punkcie  $S = (1, 2)$  i skali  $k = -3$ .
6. Funkcja  $f$  spełnia dla każdego  $x$  należącego do jej dziedziny równanie

$$1 + f(x) + (f(x))^2 + (f(x))^3 + \dots = \frac{x}{2} + 1,$$

gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji  $f$ . Naszkicuj jej wykres.

7. Liczby  $1, 2, 3, \dots, n$ , gdzie  $n \geq 3$ , losowo ustawiamy w ciąg. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń  
 $A$ : liczba  $n$  nie będzie ostatnim wyrazem tego ciągu;  
 $B$ : liczby  $1, 2, 3$  wystąpią obok siebie w kolejności wzrastania;  
 $C$ : iloczyn każdej pary sąsiednich wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.  
Wyniki zapisz w najprostszej postaci.