

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica
w Krakowie

OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2008/9

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Ile jest czwórek (x, y, z, t) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie $xy + yz + zt + tx = 2008$?
2. Rozwiąż równanie $\sin 4x + \sqrt{3} \sin 2x = 0$.
3. Znajdź liczbę c , dla której granica ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3^{n+c} - 2^n}{\sqrt{5^n + 9^{n-2c}}}$$

jest równa 2.

4. Ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, które nie są podzielne ani przez 9, ani przez 12?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Punkty $A = (2, -2)$ i $B = (8, 4)$ są końcami podstawy trójkąta równoramiennego ABC . Wierzchołek C leży na prostej $x - 3y + 34 = 0$. Znajdź równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
6. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ jeden z pierwiastków równania

$$(12p + 6)x^2 + 16px + 9p = 0$$

jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta rozwartego?

7. Cztery kule, z których trzy mają promień r , a czwarta R , ułożono na stole w piramidę w taki sposób, że każda kula jest styczna do trzech pozostałych, przy czym kule przystające tworzą podstawę piramidy. Oblicz największą odległość punktu kuli o promieniu R od stołu. Podaj warunek, jaki muszą spełniać promienie, aby ustawienie piramidy było możliwe.