

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica
w Krakowie

OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2007/8

MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Z ustalonego zbioru n liczb rzeczywistych losujemy kolejno k liczb, otrzymując ciąg różnowartościowy (a_1, \dots, a_k) . Zakładając, że $2 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwo, że ten ciąg nie jest ciągiem rosnącym.
2. Sprowadź do najprostszej postaci (niezawierającej ujemnych wykładników, ani ułamków piętrowych) wyrażenie

$$(1 - x^{-1})^{-2} - (1 + x^{-1})^{-2}.$$

3. Cena akcji pewnej firmy spadła o 60%. O ile procent musi teraz wzrosnąć cena tych akcji, aby wróciła do poprzedniego poziomu?
4. Niech P będzie izometrycznym przekształceniem płaszczyzny, w którym obrazem wykresu funkcji $f(x) = x^2$ jest wykres funkcji $g(x) = x^2 + x + 1$. Znajdź to przekształcenie i podaj wzór funkcji, której wykres jest obrazem wykresu funkcji $h(x) = \log_2 x$ poprzez przekształcenie P .

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania

$$4 \cos^2 x = 3$$

należących do przedziału $(-8\pi; 10\pi)$.

6. Znajdź równanie stycznej l do okręgu C o równaniu

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

w punkcie $A(6, 0)$. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu C względem prostej l .

7. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$(p - 2) \cdot 9^x + (p + 1) \cdot 3^x - p = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?