

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica
w Krakowie

OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2007/8

MATEMATYKA - ETAP I

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. W trójkącie równoramiennym dane są długości podstawy a i ramienia b . Oblicz długość wysokości tego trójkąta opuszczonej na jego ramię.

2. Rozwiąż nierówność

$$|2x^4 - 17| < 15.$$

3. Oblicz granicę ciągu, którego n -ty wyraz jest równy

$$a_n = n^3 - \sqrt{n^6 - 5n^3}.$$

4. Na ile sposobów można rozmieścić k kul ($k \geq 4$, każda kula innego koloru) w k ponumerowanych pudełkach tak, aby

- żadne pudełko nie było puste?
- dokładnie jedno pudełko było puste?
- dokładnie $k - 2$ pudełka były puste?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa długości krawędzi podstawy. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w ten ostrosłup do objętości kuli opisanej na nim.

6. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$(m - 3)x^4 - 3(m - 3)x^2 + m + 2 = 0$$

w zależności od parametru m .

7. Rozłóż na czynniki wielomian

$$W(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

Udowodnij, że wartość $W(n)$ tego wielomianu dla dowolnej liczby naturalnej n jest podzielna przez 12. Dla jakich naturalnych n liczba $W(n)$ nie jest podzielna przez 60?