

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
OLIMPIADA „O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2020/21
MATEMATYKA - ETAP II

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Udowodnij, że każda liczba rzeczywista $a \neq 0$ spełnia nierówność

$$a^2 + \frac{4}{a^4} \geq 3.$$

Podaj liczby, dla których prawdziwa jest równość.

2. W kwadracie $ABCD$ punkt K jest środkiem boku AB . Przez punkt K poprowadzona jest prosta prostopadła do prostej KC , która przecina bok AD w punkcie R . Wykaż, że kąty $\sphericalangle KCB$ i $\sphericalangle KCR$ mają równe miary.
3. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_3 = \frac{1}{4}$ oraz

$$a_{10} = \log_2 \cos \frac{47}{12}\pi + \log_2 \sin \left(-\frac{37}{12}\pi \right).$$

Oblicz a_{17} .

4. Z pnia drzewa w kształcie walca o średnicy podstawy D i długości H wycięto cztery przystające bale w kształcie walca o długości H i największej możliwej objętości. Oblicz objętość pozostałej części pnia.

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Napisz równania asymptot wykresu funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}.$$

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$.

6. Znajdź równanie okręgu, na którym leżą punkty $A = (8, 8)$, $B = (-8, -4)$ i $C = (6, -6)$. Napisz równania stycznych do tego okręgu, prostopadłych do prostej $4x + 3y - 6 = 0$.
7. Rozważmy zbiór S wszystkich funkcji danych wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówność

$$4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 \leq 0.$$

Wyznacz liczby elementów podzbiorów P, Q, R zbioru S , gdzie P jest zbiorem funkcji parzystych, Q jest zbiorem funkcji, których wykres przechodzi przez punkt $(0, 3)$, a R jest zbiorem funkcji rosnących w \mathbb{R} .