

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**  
**im. Stanisława Staszica w Krakowie**  
**OGÓLNOPOLSKA OLIMPIADA**  
**„O DIAMENTOWY INDEKS AGH” 2019/20**

**MATEMATYKA - ETAP II**

ZADANIA PO 10 PUNKTÓW

1. Niech  $n$  będzie dowolną nieparzystą liczbą naturalną. Udowodnij, że suma  $n$  kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez  $n$ .

2. Dla jakich liczb  $k$  trójmian kwadratowy

$$2(1 - k^2)x^2 + k(1 + k^2)x + 2k$$

jest podzielny przez dwumian  $x + k$ ?

3. Rozwiąż równanie  $\cos^2 3x - \sin^2 x = 0$ .

4. Do klasy, w której co czwarty uczeń jest jedynakiem, przyłączono drugą klasę o dwukrotnie mniejszej liczbie uczniów, wśród których jest 40% jedynaków. Jaki procent uczniów w nowo utworzonej klasie ma rodzeństwo?

ZADANIA PO 20 PUNKTÓW

5. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 9\}$  losujemy jednocześnie dwie liczby. Czynność tę powtarzamy (zwróciwszy wylosowane liczby) dotąd, aż wylosujemy dwie liczby dające tę samą resztę z dzielenia przez 3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba losowań będzie

$A$  : mniejsza niż 10,

$B$  : równa 6,

$C$  : nieparzysta.

6. Funkcja  $f$  dla każdego jej argumentu  $x$  spełnia równość

$$f(x) + (f(x))^2 + \dots = x^3,$$

której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$  oraz jej ekstrema lokalne.

7. W równoległobok  $ABCD$ , w którym kolejność wierzchołków  $ABCD$  jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara, można wpisać okrąg. Mając dane współrzędne wierzchołków  $A = (0, 1)$  i  $B = (\sqrt{3}, 0)$  oraz miarę  $120^\circ$  kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $D$ , oblicz pole powierzchni równoległoboku i napisz równanie okręgu weń wpisanego.